

北海道大学 大学院情報科学院

情報科学専攻 修士課程

情報理工学コース

専門科目 1

10 : 00 ~ 12 : 00

受験上の注意

- 本冊子内の4問、問1（基礎数学）、問2（情報数学）、問3（確率・統計）、問4（情報理論）のうち、基礎数学と情報数学を含む3問を選択し解答すること。
- すべての解答用紙に、受験番号、選択した問題番号(例えば、問3など)を記入すること。
- 選択問題チェック票に受験番号および、選択した科目に印を記入すること。
- 問題冊子はこのページを含めて7枚である。
- 解答用紙は3枚である。この他に下書き用の草案紙3枚を配付する。
- 解答は、問題ごとに別々の解答用紙に記入すること(裏面を使用してもよい。解答用紙を破損したりした場合には試験監督員に申し出ること)。
- 問題冊子、草案紙は持ち帰り、選択問題チェック票とすべての解答用紙を提出すること。
- 机の上に置いてよいものは、筆記用具（黒鉛筆、消しゴム、鉛筆削り）、時計、および特に指示があったもののみである。時計は計時機能のみを使用し、アラームの使用を禁ずる。携帯電話、スマートフォン、タブレット、コンピュータ等は電源を切っただけの中に入れておくこと。電卓、電子辞書などは使用を禁ずる。

問1. (必須) 基礎数学

[1] a, b, c を実数とし, 線形写像 $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ を

$$f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x - ay + a^2z \\ x + by + b^2z \\ x - cy + c^2z \end{pmatrix}$$

によって定義する. また, 行列 B を

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 3 & 0 \\ -1 & 5 & 4 & -2 & 5 \\ 0 & -3 & 3 & -2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

とする. 以下の小問に答えよ.

(1) 以下の等式を満たす 3×3 実行列 A_f を求めよ.

$$f \left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) = A_f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

(2) (1) で求めた行列 A_f の行列式 $\det A_f$ を求めよ.

(3) f が \mathbb{R}^3 上の全単射となるための a, b, c に関する必要十分条件を求めよ.

(4) 行列 B の階数 (ランク) を求めよ.

(5) 行列 B の5つの列ベクトルからなる集合を C とする. C の部分集合 $C' \subseteq C$ で線形独立となるようなもののうち, その要素数 (つまり $|C'|$) が最大のものをひとつ求めよ. そのようにして求めた C' が線形独立であることと, 任意の部分集合 $C'' \subseteq C'$ で $|C''| > |C'|$ となるものは線形独立ではないことを示せ.

[2] 以下の小問に答えよ.

(1) 次の不定積分を求めよ. ただし, e は自然対数の底であり, k は非負整数である.

$$\int x^k e^{3x} dx.$$

(2) 2変数実関数 $f(x, y) = -3x^2 + 2xy - 4y^3$ を考える. この関数は2つの停留点 (臨界点) を持つ. この2つの停留点を求め, それぞれが極小点, 極大点, 鞍点のいずれであるか決定せよ.

(3) 次の積分を求めよ. ただし, e は自然対数の底とする.

$$\int_{-1}^1 \left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} e^{\sqrt{x^2+y^2}} dy \right) dx.$$

問2. (必須) 情報数学

[1] 集合, 写像, 基数法, 命題論理に関する以下の問いに答えよ.

- (1) $\sqrt{3}$ が無理数であることを背理法により示せ.
 (2) 次の二つの数を16進数に変換せよ. ここで, 下付きの括弧内の数は基数を表す. 文字として0-9,A-Fを使うこと.

(i) $375_{(8)}$ (ii) $0.7109375_{(10)}$

- (3) 以下に示す実数から実数への三つの写像 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ それぞれについて, 全射であって単射でない, 単射であって全射でない, 全射かつ単射である, 全射でも単射でもない, のいずれかを答えよ.

(i) $f(x) = 2x - 4$ (ii) $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3x$ (iii) $f(x) = 3^x$

- (4) 次の二つの命題論理式が, 恒真, 恒偽, 恒真でないものの充足可能, のいずれであるかを真理値表を作成して答えよ.

(i) $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow \neg P)$
 (ii) $(\neg P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R) \vee (P \wedge Q \wedge \neg R) \vee (P \wedge Q \wedge R)$

[2] 言語理論とオートマトン理論に関する以下の問いに答えよ.

- (1) 図1に示す二つの決定性有限オートマトン M_1, M_2 を考える. このとき, 以下の三つの文字列 (i),(ii),(iii) が M_1, M_2 それぞれに受理されるか否かを答えよ.

(i) aaa (ii) aabb (iii) λ (空列)

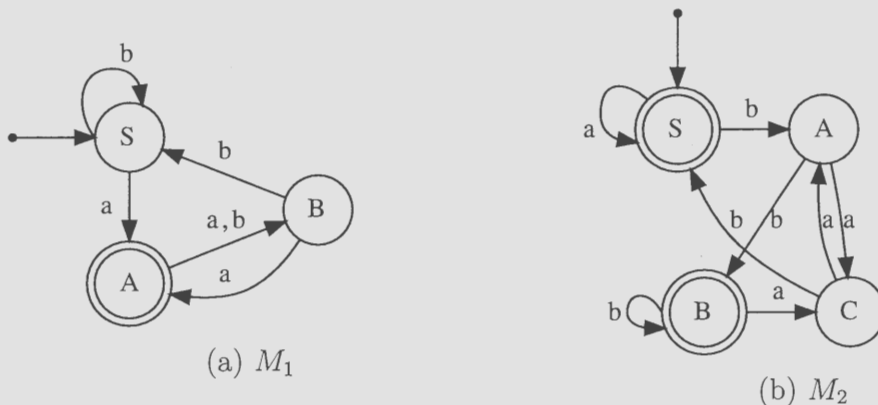


図1: 問題の有限オートマトン. ここで, S は初期状態, 二重円のノードは受理状態を示す.

(次ページへ続く)

(2) 以下の用語 (i)-(iv) に対応する例(記号)をそれぞれ一つ (a)-(d) から重ならないように選べ. ここで, $\Sigma = \{a, b\}$ はアルファベット, N は非終端記号の集合とする.

(i) 言語

(a) Σ^*

(ii) 有限長の文字列全体

(b) $L = \{a, aa, aaa, \dots\}$

(iii) 語(文字列)

(c) $A \rightarrow aB \quad (A, B \in N, a \in \Sigma)$

(iv) 生成規則

(d) $abaa$

(3) アルファベット $\Sigma = \{a, b, c\}$ 上の三つの言語 $L_1 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0, n \in \mathbb{Z}\}$ (ここで, \mathbb{Z} は整数全体), $L_2 = \{a^n b^n \mid n \geq 0, n \in \mathbb{Z}\}$, $L_3 = \{a^n \mid n \geq 0, n \in \mathbb{Z}\}$ はそれぞれ正規言語, 文脈自由言語, 文脈依存言語のどれか. ただし, チョムスキーの言語階層の中で該当する一番狭い言語を答えること (例えば, 正規言語は文脈自由言語でもあるが, その言語が正規言語であるときは正規言語と答える).

(4) 問題 (3) の L_2 を生成する文法を書け. ここで, 生成文法は, 終端記号の集合 T , 非終端記号の集合 N , 開始記号 $\sigma \in N$, 書き換え規則の集合 P の四つ組 $\mathcal{G} = (T, N, \sigma, P)$ とし, 解答には T, N, P の具体的内容を書くこと. 空列として λ を使ってよい.

問3. (選択) 確率・統計

以下の問いに答えよ。ただし、導出の過程もわかるように解答すること。

[1]

(1) 推定量の一致性と不偏性の定義を述べよ。

(2) X_1, X_2, \dots, X_n を、平均・分散が存在する同一の分布から独立に抽出した場合について考える。

- (i) 平均の推定値として、 X_1 と \bar{X} のそれぞれについて、どのような性質を持つか、一致性と不偏性の観点から根拠とともに述べよ。
ただし、

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \quad (A)$$

とする。

- (ii) 分散の推定値として、 S^2 と U^2 のそれぞれについて、どのような性質を持つか、一致性と不偏性の観点から根拠とともに述べよ。
ただし、

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (B)$$

$$U^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \quad (C)$$

とする。また、 \bar{X} は式(A)で与えられるものとする。

[2] ある病気の検査結果について、以下の事実がわかっている。

1. この検査の真陽性率（感度; True positive）は90%である。
2. この検査の真陰性率（特異度; True negative）は80%である。
3. 全体の人口の5%がこの病気に罹患している。

検査で陽性と判定された場合、実際に病気に罹患している確率を求めよ。解答においてはベイズの定理を使用すること。

問 4. (選択)情報理論

確率変数 X が値 A, B, C を取る確率 $\mathbb{P}(X)$ が表 1, 確率変数 X で条件を付けた確率変数 Y の条件付き確率 $\mathbb{P}(Y|X)$ が表 2 のように定義されているとき, 以下の問いに答えよ.

表 1 $\mathbb{P}(X)$

X	A	B	C
$\mathbb{P}(X)$	1/4	1/4	1/2

(1) X のエントロピー $H(X)$ [ビット]を求めよ. また $H(X)$ が大きいことの意味を簡潔に述べよ.

表 2 $\mathbb{P}(Y|X)$

$Y \backslash X$	A	B	C
A	1/2	0	1/4
B	0	1/2	1/4
C	1/2	1/2	1/2

(2) X と Y の相互情報量 $I(X;Y)$ [ビット]を求めよ. また $I(X;Y)$ が大きいことの意味を簡潔に述べよ.

(3) X の値ごとに, 符号アルファベットが $\{0,1\}$ の二元符号化をした場合, 平均符号長が最短となる一意復号可能な符号を 1 つ示し, その平均符号長を求めよ.

(4) (X,Y) の値ごとに, 符号アルファベットが $\{0,1\}$ の二元符号化をした場合, 平均符号長が最短となる一意復号可能な二元符号を 1 つ示し, その平均符号長を求めよ.

(5) 任意の入力 X に対し, 表 2 で与えられた条件付き確率 $\mathbb{P}(Y|X)$ で, Y を出力する無記憶定常通信路の通信路容量を求めよ.