北海道大学　大学院情報科学院

情報科学専攻　修士課程

情報理工学コース

専門科目１

１０：００～１２：００

受験上の注意

- 本冊子内の４問，問１（基礎数学），問２（情報数学），問３（確率・統計），問４（情報理論）のうち，基礎数学と情報数学を含む３問を選択し解答すること．
- すべての解答用紙に，受験番号，選択した問題番号(例えば，問３など)を記入すること．
- 選択問題チェック票に受験番号および，選択した科目に印を記入すること．
- 問題冊子はこのページを含めて６枚である．
- 解答用紙は３枚である．この他に下書き用の草案紙３枚を配付する．
- 解答は，問題ごとに別々の解答用紙に記入すること(裏面を使用してもよい．解答用紙を破損したりした場合には試験監督員に申し出ること)．
- 問題冊子，草案紙は持ち帰り，選択問題チェック票とすべての解答用紙を提出すること．
- 机の上に置いてよいものは，筆記用具（黒鉛筆，消しゴム，鉛筆削り），時計，および特に指示があったもののみである．時計は計時機能のみを使用し，アラームの使用を禁ずる．携帯電話，スマートフォン，タブレット，コンピュータ等は電源を切ってかばんの中にしまうこと．電卓，電子辞書などは使用を禁ずる．

問 1. (必須) 基礎数学

以下の問いに答えよ．答えだけでなく導出の過程も分かるように解答すること．なお，記号 $:=$ は，左辺を右辺で定義することを意味する．

[1] 以下の行列 M とベクトル $\boldsymbol{v}$ について，続く問いに答えよ．但し，a，b は実数とし，$|b| \leq 1$ とする．

$$M := \begin{bmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{v} := \begin{bmatrix} 1 \\ b \end{bmatrix}$$

(1) 行列 M の固有値と固有ベクトルの組を全て求めよ．

(2) (1) で求めた，相異なる固有値に対する固有ベクトルが線形独立となることを証明せよ．

(3) ベクトル $\boldsymbol{v}$ を，(1) で得た固有ベクトルの線形結合で表せ．

(4) n を任意の自然数とする．ベクトル $\boldsymbol{x}^{(n)} := M^n \boldsymbol{v}$ を a，b，n で表せ．

(5) 原点 $\mathbf{0}$，及び，$\boldsymbol{x}^{(n)}$，$\boldsymbol{x}^{(n+1)}$ の三点を頂点とする三角形の面積を $S^{(n)}$ とする．$S := \lim_{n\to\infty} S^{(n)}$ が収束するとき，S の最大値と，当該最大値を与える a，b の組を全て求めよ．

[2] 微分に関する以下の問いに答えよ．

(1) 関数 $f(x, y)$ が偏微分方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x,y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x,y) = 0$$

の解であるとき，$f(x, y)$ は調和関数と呼ばれる．次の関数が調和関数であることを示せ．但し，関数 $\tan^{-1}$ は $\tan$ の逆関数とする．

$$f(x,y) := \tan^{-1} \frac{y}{x}, \quad ((x,y) \in \mathbf{R}^2, \ \ x \neq 0)$$

(2) 関数 $\sin x$ のマクローリン展開を求めよ．

(3) 関数 $\cos x$ のマクローリン展開を求めよ．

(4) 次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$\frac{d^3}{dx^3} y + 27y = x$$

問 2.（ 必須）情報数学

［１］集合論，順列・組合せ，基数法に関する以下の問いに答えよ．

(1) 全体集合 U における部分集合 A と B について，以下が成り立つことを示せ．ただし，$\bar{A}$ は U における A の補集合であり，差集合 $A-B$ は $A-B=A\cap\bar{B}$ で定義される．

$$(A\cup B)-(A\cap B)=(A\cup B)\cap(\bar{A}\cup\bar{B})$$

(2) 10 問のうち 6 問を選択して解答する試験がある．最初の 5 問のうち少なくとも 3 問は選択せよとの条件があるとき，何通りの選び方があるか求めよ．

(3) 9 人の学生がプログラミングコンテストに出場するために 3 人ずつのチームを組むとき，何通りの組み方があるか求めよ．

(4) 16 進法で表された二つの数の和 $\mathrm{E82F33}_{(16)}+\mathrm{C5D4F8}_{(16)}$ の計算結果を 8 進法で表せ．

(5) 有理数 $\dfrac{45}{32}$ を 2 進法で表せ．

［２］形式言語に関する以下の問いに答えよ．

(1) アルファベット $\Sigma=\{a,b\}$ に対して，集合 $\{a,aa,bb\}$ は，語と言語のどちらであるかを答えよ．

(2) アルファベット $\Sigma=\{a,b\}$ に対して，そのクリーネ閉包 $\Sigma^*=\displaystyle\bigcup_{n=0}^{\infty}\Sigma^n$ がどんな集合であるかを説明せよ．

(3) 正規文法

$$\mathcal{G}=(T=\{a,b\},N=\{\sigma\},\sigma,P=\{\sigma\to\lambda,\sigma\to a\sigma\})$$

の生成する正規言語 $L(\mathcal{G})$ を要素を列挙することで示せ．要素は規則がわかる程度に書き，残りは $\ldots$ として省略してよい．ここで，T は終端記号のアルファベット，N は非終端記号のアルファベット，σ は開始記号，λ は空列，P は書き換え規則である．

(4) アルファベット $\Sigma=\{a,b\}$ に対して，言語 $L=\{a^nb\mid n\,(\geq 0)\in\mathbb{Z}\}$ が正規言語であることを証明せよ．証明には正規文法あるいは正規表現，有限オートマトンを使ってよい．

(5) 言語 $L=\{0^n1^n\mid n\,(\geq 0)\in\mathbb{Z}\}$ が正規言語でないことをポンピング定理を使って証明せよ．

問 3（選択）確率・統計

確率・統計に関する以下の問いに答えよ．ただし，答えだけでなく，導出過程もわかるように解答すること．

［1］連続型確率変数 X の分布関数が

$$F(x) = \begin{cases} 0, & (x < 0), \\ kx^3, & (0 \leq x < 2), \\ 1, & (2 \leq x), \end{cases}$$

で与えられるとき，以下の問いに答えよ．

(1) 実数 k の値を求めよ．

(2) 確率 $P(0 < X \leq 1)$ を求めよ．

(3) 確率変数 X の確率密度関数 $f(x)$ を求めよ．

(4) 関数 $f(x)$ のグラフの概形を示せ．

(5) 確率変数 X の期待値 $\mathrm{E}[X]$ と分散 $\mathrm{Var}[X]$ を求めよ．

［2］母平均が μ, 母分散が σ^2 の母集団からの大きさ n の無作為標本を $X_1, \ldots, X_n$ とするとき，以下の問いに答えよ．ただし，μ, σ^2 はともに未知母数であるとする．

(1) 標本平均を $\overline{X} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$ とするとき，$\overline{X}$ は μ の不偏推定量であること，すなわち，$\mathrm{E}[\overline{X}] = \mu$ が成り立つことを示せ．

(2) 等式 $\mathrm{E}[(\overline{X})^2] = \dfrac{\sigma^2}{n} + \mu^2$ が成り立つことを示せ．

(3) 統計量 $T_1 = \dfrac{1}{n-1}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2$ は σ^2 の不偏推定量であることを示せ．

(4) 統計量 $T_2 = (\overline{X})^2 - \dfrac{1}{n(n-1)}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}\right)^2$ は μ^2 の不偏推定量であることを示せ．

(5) 母集団が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ であるとき，確率 $P(T_2 < 0)$ は正であること，すなわち，$P(T_2 < 0) > 0$ が成り立つことを示せ．ただし，$X_1, \ldots, X_n$ が正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ からの無作為標本であるとき，$\overline{X}$ と T_1 は独立な確率変数となることを用いてよい．

問4. （選択）情報理論

以下の問いに答えよ．答えだけでなく導出の過程も分かるように解答すること．

[1] 確率変数 X と Y の結合確率分布 $P(X,Y)$ が次の表で与えられるとき，以下の問いに答えよ．ただし，$\log_2 3 = 1.585$ とし，小数点第3位を四捨五入して答えよ．

$P(X,Y)$		$Y=0$	$Y=1$
X	0	1/2	1/4
	1	1/4	0

(1) X と Y の結合エントロピー $H(X,Y)$ は何ビットか求めよ．

(2) X のエントロピー $H(X)$ は何ビットか求めよ．

(3) X で条件づけた Y の条件付きエントロピー $H(Y|X)$ は何ビットか求めよ．

(4) X と Y の相互情報量 $I(X;Y)$ は何ビットか求めよ．

[2] 符号化に関する以下の問いに答えよ．

(1) a,b,c の3種類の情報源記号を，それぞれ確率 $0.1, 0.3, 0.6$ で発生する記憶のない定常情報源 S を考える．この情報源 S から発生する情報源系列について，2情報源記号ごと（aa や bc など）にアルファベット $\{0,1\}$ を用いて2元符号化するブロックハフマン符号を求め，1情報源記号あたりの平均符号語長 L を求めよ．

(2) 符号語 $\mathbf{w}$ が $\mathbf{w} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_1+x_3+x_4, x_1+x_2+x_3, x_2+x_3+x_4)$ となる $(7,4)$ ハミング符号において，系列 1011011 を受信した．単一誤りまでを想定した場合，送信された情報記号は何であったと推定されるか答えよ．$+$ は2元体上の加算を表す．

(3) 2元体上の生成多項式が $G(x) = x^4 + x^2 + 1$ である符号長7の巡回符号において，情報ビット 110 を符号化した後の2元系列を答えよ．