北海道大学　大学院情報科学院

情報科学専攻　修士課程

情報理工学コース

専門科目１

１０：００～１２：００

受験上の注意

- 本冊子内の４問，問１（基礎数学），問２（情報数学），問３（確率・統計），問４（情報理論）のうち，基礎数学と情報数学を含む３問を選択し解答すること．
- すべての解答用紙に，受験番号，選択した問題番号（例えば，問３など）を記入すること．
- 選択問題チェック票に受験番号および，選択した科目に印を記入すること．
- 問題冊子はこのページを含めて６枚である．
- 解答用紙は３枚である．この他に下書き用の草案紙３枚を配付する．
- 解答は，問題ごとに別々の解答用紙に記入すること（裏面を使用してもよい．解答用紙を破損したりした場合には試験監督員に申し出ること）．
- 問題冊子，草案紙は持ち帰り，選択問題チェック票とすべての解答用紙を提出すること．
- 机の上に置いてよいものは，筆記用具（鉛筆（黒），消しゴム，鉛筆削り，シャープペンシル（黒）），時計，および特に指示があったもののみである．時計は計時機能のみを使用し，アラームの使用を禁ずる．携帯電話，スマートフォン，タブレット，コンピュータ等は電源を切ってかばんの中にしまうこと．電卓，電子辞書等の使用を禁ずる．

専門科目 1

問 1. (必須) 基礎数学

[1] 以下の行列 A, B について，次の (1)〜(4) の問いに答えよ．

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(1) 行列 A と B が行列積に関して可換であることを示せ．

(2) 行列 A と B を同時対角化する直交行列 P を求めよ．

(3) (2) で求めた直交行列 P を用いて，P^TAP および P^TBP を求めよ．ただし，P^T は行列 P の転置を表すとする．

(4) 実数 α, β に対して行列 $C = \alpha A + \beta B$ を定義する．このとき C も P により対角化できること，すなわち，P^TCP が対角行列となることを示せ．

[2] 関数 $f(x, y) = x^2 + 3y^2 - 4xy + 2x$ について，次の (1)〜(2) の問いに答えよ．

(1) 点 $(1, 1)$ における $f(x, y)$ の 2 次の Taylor 展開を求めよ．

(2) 関数 $f(x, y)$ の停留点をすべて求め，それらが極小・極大・鞍点のいずれであるかを判定せよ．

問 2. (必須) 情報数学

以下の問いに答えよ．ただし，答えだけでなく導出の過程も分かるように解答すること．

[1] 集合と写像に関する以下の問いに答えよ．

(1) 以下の論理式の真理値表を作成せよ．ただし，論理記号は $\neg$（否定），$\wedge$（論理積），$\vee$（論理和），$\rightarrow$（含意）とする．

(i) $(P \vee Q) \rightarrow (\neg P \wedge Q)$

(ii) $(\neg Q \rightarrow P) \wedge (P \rightarrow Q)$

(iii) $\big((P \rightarrow Q) \wedge (R \vee \neg Q)\big) \rightarrow \big(P \rightarrow R\big)$

(2) 次の各写像について,「単射だが全射ではない」,「全射だが単射ではない」,「全単射である」,「単射でも全射でもない」のいずれに該当するか答えよ．ただし，$\mathbb{Z}$ は整数全体の集合，$\mathbb{R}$ は実数全体の集合，$(0, \infty)$ は 0 より大きい全ての実数の集合とする．

(i) $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad f(n) = 2n$

(ii) $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, \quad g(n) = \lfloor n/2 \rfloor$ （ただし $\lfloor x \rfloor$ は x 以下の最大の整数)

(iii) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = e^x$ （ただし e は自然対数の底)

(iv) $k : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, \quad k(x) = \ln x$ （ただし $\ln$ は自然対数)

[2] 順列・組合せに関する以下の問いに答えよ．なお，自然数に 0 は含まないものとする．

(1) 和が 100 となる二つの自然数からなる重複順列は何通りあるか答えよ．

(2) 和が 100 となる三つの自然数からなる重複順列は何通りあるか答えよ．

[3] 言語理論とオートマトン理論に関する以下の問いに答えよ．

(1) 以下の生成規則を持つ文法 G によって生成されるアルファベット $\Sigma = \{a, b, c\}$ 上の言語 $L(G) \subseteq \Sigma^*$ を求めよ．ただし，S, A を非終端記号，a, b, c を終端記号とし，S を開始記号とする．

$$G: \quad S \rightarrow aSb, \quad aS \rightarrow Aa, \quad Aab \rightarrow c$$

(2) (1) の $L(G)$ に対し，$L(G') = L(G)$ を満たす文脈自由文法 G' の生成規則を答えよ．

問 3. (選択) 確率・統計

以下の問いに答えよ．ただし，答えだけでなく導出の過程も分かるように解答すること．

[1] kを自然数，pを実数(ただし，$0<p<1$)とする．非負の整数xに対して，関数$f(x)$を

$$f(x)=\binom{x+k-1}{x}p^k(1-p)^x,\quad x=0,1,2,\ldots$$

と定義する．このとき，以下の問いに答えよ．ただし，実数αと非負の整数rに対して，

$$\binom{\alpha}{r}=\begin{cases}\dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-r+1)}{r!}, & r=1,2,3,\ldots\\ 1, & r=0\end{cases}$$

である．

(1) $f(x)=\binom{-k}{x}p^k(p-1)^x$ となることを示せ．

(2) 関数$f(x)$は標本空間$\Omega=\{0,1,2,\ldots\}$上の確率関数であることを示せ．

(3) 関数$f(x)$を確率関数とする確率変数Xの確率母関数$\mathbb{E}[s^X]$を求めよ．ただし，$0\leq s\leq 1$とする．

(4) 関数$f(x)$を確率関数とする確率変数Xの期待値と分散を求めよ．

[2] 標本空間を$\mathcal{X}$と書き，パラメータ空間をΘと書く．さらに，パラメータθを持つ確率分布$p(x|\theta)$が与えられているとする．ここで，帰無仮説$H_0:\theta\in\Theta_0$，対立仮説$H_1:\theta\in\Theta_1$なる仮説検定を考える．

(1) このとき，受容域と棄却域の定義を述べよ．

(2) 有意水準をαとし，仮説検定の手続きを説明せよ．ただし，説明は数式を用いた逐次的な表現を用いよ．ここで「説明は数式を用いた逐次的な表現」とは以下のような表記に従うことをいう:

 (i) Aを計算する．

 (ii) Bを計算する．

 (iii) $A\leq B$ならば，帰無仮説を受容する．一方で$A>B$ならば，帰無仮説を棄却する．

ただし，漸近分布の存在は仮定してよい．

(3) 検出力関数の定義を述べよ．また，最強力検定の定義を述べよ．

(4) $\mathcal{N}(\cdot;\mu,\sigma^2)$を平均$\mu$，分散$\sigma^2$の正規分布とする．$X_1,X_2,\ldots,X_n\sim\mathcal{N}(\cdot;\mu,\sigma_0^2)$とする．ただし，$\sigma_0^2$は既知とする．また，有意水準を$\alpha$とする．$H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu\neq\mu_0$に対する棄却域を求めよ．

問 4. (選択) 情報理論

以下の問いに答えよ．ただし，$0 < p < q < 1/3$ とする．なお，答えだけでなく導出の過程も分かるように解答すること．

[1] 2 種類の情報源記号 X,Y をそれぞれ $p, (1-p)$ で発生する記憶のない定常情報源 S_p と，2 種類の情報源記号 Z,W をそれぞれ $q, (1-q)$ で発生する記憶のない定常情報源 S_q を考える．また，これらの情報源のエントロピーを各々 $I(S_p), I(S_q)$ とする．このとき，$I(S_p), I(S_q)$ はどちらが大きいか，証明とともに答えよ．

[2] 4 種類の情報源記号 A, B, C, D をそれぞれ $pq, p(1-q), q(1-p), (1-p)(1-q)$ で発生する記憶のない定常情報源 S を考える．
この情報源 S のエントロピーを $I(S_p), I(S_q), p$ の式で求めよ．ここで，$I(S_p)$, $I(S_q)$ は上記の [1] で定義された情報源 S_p, S_q のエントロピーとする．

[3] 上記の [2] の情報源 S から発生する情報源系列を各記号毎にアルファベット $\{0, 1\}$ を用いて 2 元符号化するハフマン符号を設計せよ．

[4] 上記の [3] で設計したハフマン符号を用いた場合，S の 1 情報源記号当たりの平均符号長を p, q の式で求めよ．