北海道大学
大学院情報科学院情報科学専攻
システム情報科学コース 入学試験
修士課程

2023 年 8 月 24 日(木) 10:00～12:00

専門科目 1

受験上の注意

- 「解答始め」の合図があるまで，この問題冊子を開かないこと.
- 受験中，机上には，受験票，鉛筆(黒)，シャープペンシル(黒)，消しゴム，鉛筆削り，眼鏡，時計(計時機能のみのもの)以外の所持品は置くことができない．ただし，監督員が別に指示した場合は，この限りでない.
- 携帯電話等の情報通信機器類は，必ずアラームの設定等を解除した上で電源を切っておくこと.
- 問題冊子は本表紙を含め6枚ある(2枚目は白紙)．試験開始後，問題冊子を確認し，不備(ページ欠落，汚れ，印刷の不鮮明など)があれば試験監督員に申し出ること. 試験終了後，問題冊子は回収しない.
- 解答用紙の枚数は2枚である. 出題された3問中から2問を選択して，問題ごとに解答用紙を分けて解答すること.
- 解答用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には解答用紙表面右下の「☐裏面を使用」をチェックのこと.
- 解答用紙に選択した問題の番号，受験番号の誤記，記入もれがないか，十分に確かめること. 受験番号と選択した問題の番号を別紙の「選択問題チェック票」にも記入し，提出のこと.
- 草案紙の枚数は2枚である. 草案紙は回収しない.

システム情報科学コース　専門科目１

問１（応用数学Ｉ）　以下の各設問に答えなさい．

1-1) $\boldsymbol{A}$を実行列，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$，$\boldsymbol{D}$を複素行列とする．次の各小問(a)～(d)に答えなさい．ただし，$\boldsymbol{A}$の転置行列を$\boldsymbol{A}^T$，$\boldsymbol{B}$の各成分をその共役複素数で置き換えた行列を$\overline{\boldsymbol{B}}$，単位行列を$\boldsymbol{I}$とし，$(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})$が正則であるものとする．

(a) 行列$\boldsymbol{A}$が以下のように与えられている場合，$\boldsymbol{A}$のすべての固有値を求めなさい．ただし，$abc \neq 0$とする．

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 0 & -a & b \\ a & 0 & -c \\ -b & c & 0 \end{bmatrix}$$

(b) $(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})$であることを示しなさい．また，$(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})^{-1} = (\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})$であることを示しなさい．

(c) $\boldsymbol{B}\overline{\boldsymbol{B}}^T = \boldsymbol{I}$，$\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B})(\boldsymbol{I}+\boldsymbol{B})^{-1}$の時，$\overline{\boldsymbol{C}}^T = -\boldsymbol{C}$であることを示しなさい．

(d) $\overline{\boldsymbol{D}}^T = -\boldsymbol{D}$の時，$\boldsymbol{D}$のすべての固有値は，純虚数か0であることを示しなさい．

1-2) スカラー場fが$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z - r^2$，ベクトル場$\boldsymbol{G}$が$\boldsymbol{G}(x,y,z) = -ay\boldsymbol{i} + bx\boldsymbol{j}$と与えられているとき，次の各小問(a)～(d)に答えなさい．ただし，a，b，rは正の定数，$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$は，それぞれデカルト座標系における各座標軸の正の方向を向く単位ベクトル，$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$である．

(a) 勾配grad$f(=\nabla f)$を求めなさい．

(b) 回転curl$\boldsymbol{G}(=\nabla \times \boldsymbol{G})$を求めなさい．

(c) 曲面Sが$z = h(x,y)$の形で与えられる場合，dAを曲面Sの面素として以下の式が成り立つことを示しなさい．

$$dA = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2}\, dxdy$$

(d) $f(x,y,z) = 0$，$z \geq 0$で与えられる曲面S（曲面の向きは，原点から見える側を内側とする）に対し，以下に示す面積分を求めなさい．ここで$\boldsymbol{n}$をS上の外向き単位法線ベクトルとする．

$$\iint_S (\mathrm{curl}\boldsymbol{G}) \cdot \boldsymbol{n}\, dA$$

問１終わり

システム情報科学コース　専門科目 1

問 2（応用数学 II）　以下の各設問に答えなさい．

2-1)　yがxの関数のとき，次の微分方程式(a), (b)の一般解をそれぞれ求めなさい．

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + y \qquad \text{(a)}$$

$$y + \frac{2}{y^2} + \left(x + 2y - \frac{4x}{y^3}\right)\frac{dy}{dx} = 0 \qquad \text{(b)}$$

2-2)　yがxの関数のとき，下式(c)の微分方程式を初期条件 $y(0) = 4,\ y'(0) = 5$ のもとでラプラス変換を用いて解きなさい．

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dx} + 2y = 12e^{-x} \qquad \text{(c)}$$

2-3)　tを時間とする実信号$f(t)$のフーリエ変換$F(\omega)$が下式(d)で，またそのフーリエ逆変換が下式(e)で定義されるとき，下式(f)が成り立つことを示しなさい．
ただし，iは虚数単位，ωは角周波数である．

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt \qquad \text{(d)}$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega t}d\omega \qquad \text{(e)}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2\, d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} \{f(t)\}^2 dt \qquad \text{(f)}$$

問 2　終わり

システム情報科学コース 専門科目１

問３（情報学基礎） 以下の各設問に答えなさい．

3-1) 全体集合 U とその部分集合 A, B, $C \subset U$ に関して，次の６つの式が成り立っている．

$$|U| = 20, \quad |A| = 8, \quad |B| = 7, \quad |A \cup B \cup C| = 18, \quad |A \cap B| = 3, \quad |(A \cup B) \cap C| = 0$$

これらの集合に関して以下の小問 (a)〜(c) に答えなさい．

(a) 部分集合 A, B, C によって全体集合 U はいくつの排他的な領域に分割されているか．ただし，空集合は含めない．

(b) 以下の (i)〜(iv) の集合の要素の数を答えなさい．式中の記号で，$\overline{X}$ は補集合，$X \times Y$ は直積，2^X はべき集合をそれぞれ表す．

(i) C　　(ii) $A \cap \overline{B}$　　(iii) $A \times B \times C$　　(iv) $2^{A \cap B}$

(c) 全体集合 U から無作為に要素をひとつ選び，その要素 x が，$x \in A$ なら１点，$x \in B$ なら２点，$x \in C$ なら４点，それ以外なら０点を得る．２つ以上の集合の要素だった場合は点数の高い方のみを得る．１回の要素の抽出で得る点の期待値を答えなさい．

3-2) 図 3-1 に示す８パターンを提示する a〜e の５つの LED からなる表示器を考える．この表示器は P,Q,R を入力とする図 3-2 の論理回路で制御され，各 LED は接続する論理回路の出力 A〜E が１で点灯，０で消灯する．以下の小問 (a)〜(c) に答えなさい．

(a) a の LED の点灯はブール表現で $B_a(P, Q, R) = A = Q + PR$ で与えられる．残りの LED についても，同様に点灯の条件を最も簡単な入力の基本積の和の形で示しなさい．

(b) LED の b への出力 B を NAND ゲートだけで構成しその回路図を示しなさい．

(c) この論理回路の出力側に，図 3-3 のように追加の回路を付け，新たな入力 S が１のとき，点灯・消灯が反転したパターンの信号を Ax〜Ex に出力するように改造する．新たに追加する拡張論理回路の構成を説明しなさい．

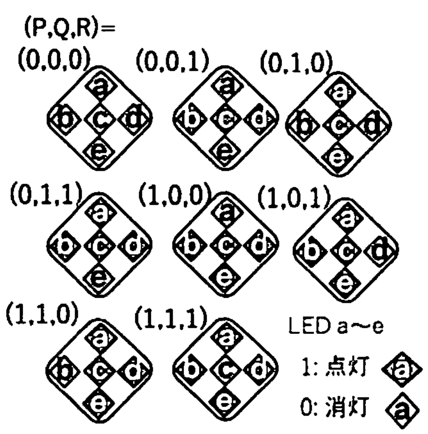

図 3-1 LED 表示８パターン

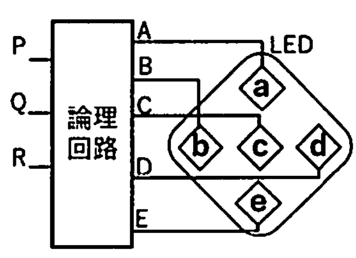

図 3-2　論理回路

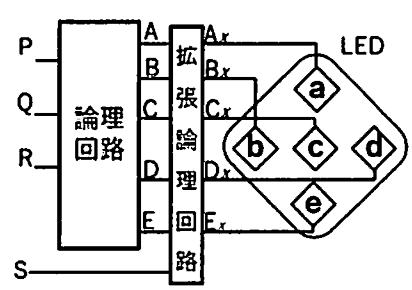

図 3-3　拡張論理回路

3-3) 3桁の2進数（3bit）を要素とする集合 $V = \{\ b_3b_2b_1 \mid b_i\ \in \{0,1\},\ 1 \le i \le 3\}$ に対して，以下に示す f, g, h の3つの写像が定義されている．この集合と写像に関して以下の小問 (a)〜(c) に答えなさい．式中の記号で $\tilde{x}$ は bit$x$ の反転を表す．

$$f(b_3b_2b_1) = b_2b_1b_3, \qquad g(b_3b_2b_1) = b_1b_2b_3, \qquad h(b_3b_2b_1) = b_3b_2\tilde{b}_1$$

(a) (i)〜(v) の要素または集合を示しなさい．
(i) $f(001)$　(ii) $g \circ f(110)$　(iii) $g \circ h(101)$
(iv) $\{X \in V \mid f(X) = g(X)\}$　(v) $\{X \in V \mid f \circ h(X) = g \circ h \circ g(X)\}$

(b) 以下の (i), (ii) の写像 p, q それぞれを，f, g, h の合成写像で定義しなさい．写像に逆写像が存在するときにはそれを用いてもよい．

(i) $p(b_3b_2b_1) = b_3\tilde{b}_2b_1$　(ii) $q(b_3b_2b_1) = b_3b_1b_2$

(c) 写像の集合 $\{f,\ g,\ h\}$ から重複を許して無作為に3回選び，順に写像を適用することを考える．これにより，要素 001 が V の要素（000〜111）に写像される確率を各々求めなさい．

3-4) 以下の小問 (a)〜(c) に答えよ．

(a) 図3-4に示した無向グラフについて (i)〜(iii) の問いに答えよ．ただし，次数と直径の計算では辺の重みは考えない．
(i) 総次数　(ii) グラフの直径　(iii) 最小全域木の辺の数と重み合計

(b) 図3-4の無向グラフについての (i)〜(iv) の記述が正しければ○，正しくないならば×をそれぞれ答えなさい．
(i) 閉オイラー路を持つ．　(ii) 平面グラフである．　(iii) 二部グラフである．
(iv) 正則グラフである．

(c) 図3-5の有向グラフにおいて，ノード a からノード o へのネットワークフローの最大値とそれを決定する有向辺の集合を求めなさい．また，ノード a からノード k についても同じく求めなさい．

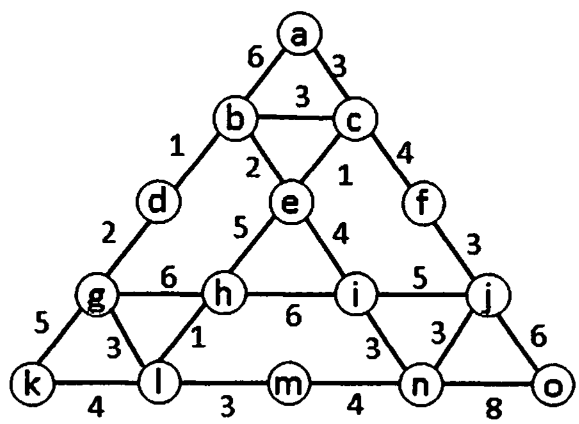

図3-4　無向グラフ（重み付き）

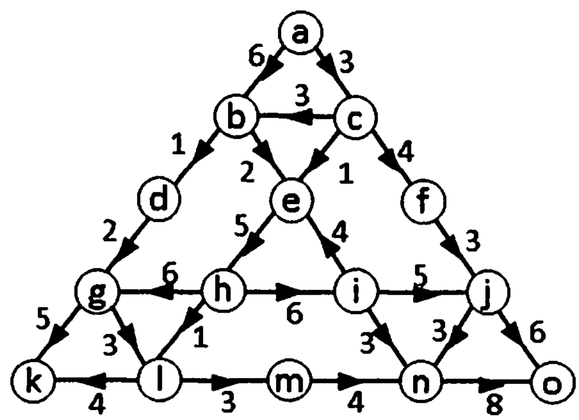

図3-5　有向グラフ（重み付き）

【問3終わり】