北海道大学
大学院情報科学院情報科学専攻
システム情報科学コース 入学試験
修士課程

2022 年 8 月 18 日(木) 10:00～12:00

専門科目 1

受験上の注意

- 「解答始め」の合図があるまで，この問題冊子を開かないこと．
- 受験中，机上には，受験票，鉛筆（黒），シャープペンシル（黒），消しゴム，鉛筆削り，眼鏡，時計（計時機能のみのもの）以外の所持品は置くことができない．ただし，監督員が別に指示した場合は，この限りでない．
- 携帯電話等の情報通信機器類は，必ずアラームの設定等を解除した上で電源を切っておくこと．
- 問題冊子は本表紙を含め6枚ある（2枚目は白紙）．試験開始後，問題冊子を確認し，不備（ページ欠落，汚れ，印刷の不鮮明など）があれば試験監督員に申し出ること．試験終了後，問題冊子は回収しない．
- 解答用紙の枚数は2枚である．<u>出題された3問中から2問を選択して</u>，問題ごとに解答用紙を分けて解答すること．
- 解答用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には解答用紙表面右下の「□裏面を使用」をチェックのこと．
- 解答用紙に選択した問題の番号，受験番号の誤記，記入もれがないか，十分に確かめること．受験番号と選択した問題の番号を別紙の「選択問題チェック票」にも記入し，提出のこと．
- 草案紙の枚数は2枚である．草案紙は回収しない．

システム情報科学コース　専門科目１

問１（応用数学Ｉ）　以下の各設問に答えなさい．

1-1)　２次形式 $Q = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + 4x_3x_1$ に関して，次の各小問(a)〜(c)に答えなさい．ただし，$\boldsymbol{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T$ とする．

(a) ２次形式 Q を $Q = \boldsymbol{x}^T A \boldsymbol{x}$ と記述した場合，A を求めなさい．ただし，A は，対称行列とする．

(b) A のすべての固有値と，各固有値に対応する，大きさ１の固有ベクトルを求めなさい．

(c) $\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x} = 1$ の時, Q の最大値を求めなさい．なお，その理由も記述すること．

1-2)　ベクトル場 $\boldsymbol{B}$ が $\boldsymbol{B}(x, y, z) = ax\boldsymbol{i} + by\boldsymbol{j} + cz\boldsymbol{k}$ と与えられているとき，次の各小問(a)〜(c)に答えなさい．ただし，a, b, c は定数，$\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ は，それぞれデカルト座標系における各座標軸の正の方向を向く単位ベクトルである．

(a) $\boldsymbol{B}$ の発散 div$\boldsymbol{B} = \nabla \cdot \boldsymbol{B}$ と回転 curl$\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{B}$ を求めなさい．

(b) 原点を中心とした半径 r の上半球面（$z \geq 0$，底面を含まず，曲面の向きは，原点から見える側を内側とする）を S としたとき，S 上の点 (x, y, z) における外向き単位法線ベクトル $\boldsymbol{n}$ を求めなさい．

(c)　(b)で与えられる S に対し，以下に示す面積分を求めなさい．ここで，dA を面素とする．

$$\iint_S \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{n} dA$$

問１終わり

システム情報科学コース　専門科目１

問２　（応用数学Ⅱ）

以下の各設問に答えなさい．

2-1)　次の微分方程式(a)，(b)の一般解を求めなさい．

(a) $(x+y)^2\dfrac{dy}{dx}=1$

(b) $x\dfrac{dy}{dx}-(2+x)y=e^x$

2-2)　次の小問(a)，(b)に答えなさい．

(a) $f(t)=\sin\omega t$ のラプラス変換が$F(s)=\dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$であることを示せ．
ただし ω は定数である．

(b) $G(s)=\dfrac{e^{-Cs}}{s^2+2As+A^2+B^2}$ のラプラス逆変換 $g(t)$ を求めなさい．
ただし A，B，C は正の定数である．

2-3)　周期 2π の周期関数 $h(t)$ のフーリエ級数展開を

$$h(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt)$$

と表すことにする．次の小問(a)，(b)に答えなさい．

(a) $h(t)$ が次式のように与えられるとき，そのフーリエ級数展開の係数 a_0，a_n （ただし n は１以上の整数）を求めなさい．

$$\begin{cases} h(t)=\dfrac{|t|}{\pi} & (-\pi\le t<\pi) \\ h(t+2k\pi)=h(t) & (k\ \text{は整数}) \end{cases}$$

(b) (a)の結果を用いて次の等式が成立することを証明しなさい．

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

問２　終わり

システム情報科学コース 専門科目 1

問 3（情報学基礎）

以下の **3-1)**〜 **3-4)** の各設問に答えなさい．

3-1) 全体集合 $U = \{\, x \mid x$ は $0 \leqq x \leqq 7$ の整数 $\}$ について，部分集合 $A = \{\, x \in U \mid x$ は素数 $\}$ と，写像 $f,\ g,\ h,\ w$ が以下のように与えられている．ここで，$x \bmod y$ は x を y で割った余り，$P \backslash Q$ は差集合を表す記法とする．

$$\begin{aligned} f &: U \longrightarrow U, \quad f(x) = 7 - x \\ g &: U \longrightarrow U, \quad g(x) = (x+1) \bmod 8 \\ h &: U \longrightarrow U, \quad h(x) = x^2 \bmod 8 \\ w &: U \times U \longrightarrow U, \quad w(x,\ y) = |x - y| \end{aligned}$$

以下の小問 **(a)** 〜 **(c)** に答えなさい．

(a) 内包的形式で定義された以下の (i)〜(iv) の集合を外延的形式で記しなさい．

(i) $\{\, x \mid x \in U \backslash A\}$ (ii) $\{\, f(x) \mid x \in A\}$ (iii) $\{\, x \mid f(x) = g(x),\ x \in U\}$
(iv) $\{\, x \mid h(x) = 1,\ x \in U\}$

(b) 以下の (i)〜(iii) の集合の要素の数を答えなさい．

(i) $U \times U$ (ii) $h(U) = \{\, h(x) \mid x \in U\}$ (iii) $\{\, v \mid v = w(x,\ f(x)),\ x \in U\}$

(c) 写像 $k : U \longrightarrow U,\ k(x) = w(x,\ f(x))$ に関して，以下の (i), (ii) に答えなさい．

(i) 写像 k が全射でも単射でもないことを示しなさい．
(ii) 写像 k の定義域と値域を適切に限定することで全単射になることを示しなさい．

3-2) 4 つのブール変数 x, y, z, w からなるブール表現 $E(x,y,z,w)$ が次の式で与えられている．

$$E(x,y,z,w) \;=\; xy(zw' + w) + yw(x+z) + (y+z)'w + x'yzw'$$

ただし，式中の x' は x の逆（否定）を表している．

以下の小問 **(a)** 〜 **(d)** に答えなさい．

(a) $E(x,y,z,w)$ のカルノー図（Karnaugh map）を示しなさい．

(b) $E(x,y,z,w)$ を最も簡略化された基本積の和の形式に書き換えなさい．

(c) 入力 (x,y,z,w) の 0，1 の組み合わせに関して，入力 $(0,1,0,1)$ に対する出力を無視できる（Don't Care）ものとする，このことにより (b) で求めた $E(x,y,z,w)$ がさらに簡略化できることを示しなさい．

(d) (c) で簡略化したブール表現に関して，NOR ゲートのみを用いて論理ゲート数が最小の論理回路を考える．これの論理回路図とそれに対応するブール表現を示しなさい．なお，最小ゲート構成の論理回路が複数ある場合においても，そのうちのひとつのみの解答でよい．なお，NOR ゲートへの入力数は 3 つ以上としてもよい．

次ページに続く

3-3) 頂点の集合 $V = \{a, b, c, d, e, f\}$ と，辺の集合 $E = \{ab,\ bc,\ cd,\ de,\ ef,\ fa,\ ad,\ be,\ cf\}$ によりグラフ $G(V,\ E)$ が定義されている．なお，E の要素の ab は，頂点 a, b を端点とする無向辺を表している．このグラフ $G(V,\ E)$ について，以下の小問 **(a)** ～ **(c)** に答えなさい．

(a) グラフ $G(V,\ E)$ に関して，(i) 頂点次数の最大値，(ii) 頂点次数の総和，(iii) グラフの直径，をそれぞれ答えなさい．

(b) 次の (i)～(v) について，正しいものに○，正しくないものに×を答えなさい．

(i) グラフ $G(V,\ E)$ は完全グラフ（complete graph）である．
(ii) グラフ $G(V,\ E)$ は2部グラフ（bipartite graph）である．
(iii) グラフ $G(V,\ E)$ は正則グラフ（regular graph）である．
(iv) グラフ $G(V,\ E)$ は平面的グラフ（planar graph）である．
(v) グラフ $G(V,\ E)$ は閉じたオイラー路（Eulerian circuit）を持つ．

(c) グラフ $G(V,\ E)$ の辺集合 E の各要素に対して，正の整数値のコストを以下のように設定する．

$$ab:6,\quad bc:2,\quad cd:5,\quad de:3,\quad ef:5,\quad fa:4,\quad ad:3,\quad be:4,\quad cf:6$$

このとき，G を張るコスト最小の木（最小全域木，minimum spanning tree）を求め，その木の辺集合とコスト総和を記しなさい．

3-4) XY 平面上に設定された間隔 1 の直交格子を考える．いま，位置 $(x,\ y)$ にいるロボットに，以下の 4 種類の命令 $E,\ N,\ W,\ S$ を与えて格子上を移動させることを考える．

$$E:\ (x+1,\ y),\quad N:\ (x,\ y+1),\quad W:\ (x-1,\ y),\quad S:\ (x,\ y-1)$$

たとえば，初期位置 $(0,0)$ にいるロボットに命令の列 (N, W, S, W) を与えると，下に示す順に格子点を経由して移動する．

$$(0,0) \xrightarrow{N} (0,1) \xrightarrow{W} (-1,1) \xrightarrow{S} (-1,0) \xrightarrow{W} (-2,0)$$

この移動ロボットについて，以下の小問 **(a)** ～ **(c)** に答えなさい．

(a) 初期位置 $(0,\ 0)$ のロボットに長さ 8 の移動命令列を与えて出来る移動軌跡は全部で何種類あるか．格子点を通過する順も区別して考える．

(b) 初期位置 $(0,\ 0)$ のロボットが長さ 8 の移動命令列を実行したとき，到着できる格子点は全部でいくつあるか．

(c) 4 つの移動命令の選択確率が同じであると仮定すると，長さ 8 の移動命令列を実行した結果，ロボットが初期位置に戻る確率はいくつか．既約の分数で答えよ．

問 3 終わり