北海道大学
大学院情報科学院情報科学専攻
システム情報科学コース 入学試験
修士課程

2022 年 8 月 18 日(木) 13:00～15:00

専門科目 2

受験上の注意

- 「解答始め」の合図があるまで，この問題冊子を開かないこと.
- 受験中，机上には，受験票，鉛筆(黒)，シャープペンシル(黒)，消しゴム，鉛筆削り，眼鏡，時計(計時機能のみのもの)以外の所持品は置くことができない. ただし，監督員が別に指示した場合は，この限りでない.
- 携帯電話等の情報通信機器類は，必ずアラームの設定等を解除した上で電源を切っておくこと.
- 問題冊子は本表紙を含め8枚ある(2枚目は白紙). 試験開始後，問題冊子を確認し，不備(ページ欠落，汚れ，印刷の不鮮明など)があれば試験監督員に申し出ること. 試験終了後，問題冊子は回収しない.
- 解答用紙の枚数は2枚である. 出題された4問中から2問を選択して，問題ごとに解答用紙を分けて解答すること.
- 解答用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には解答用紙表面右下の「□裏面を使用」をチェックのこと.
- 解答用紙に選択した問題の番号，受験番号の誤記，記入もれがないか，十分に確かめること. 受験番号と選択した問題の番号を別紙の「選択問題チェック票」にも記入し，提出のこと.
- 草案紙の枚数は2枚である. 草案紙は回収しない.

システム情報科学コース　専門科目 2

問 1 （力学）　重力加速度を g とする．質点および剛体の運動において，空気抵抗は無視でき，力学的エネルギーは保存されるものとする．以下の 1-1), 1-2) の各設問に答えなさい．<u>なお設問 1-2)は次ページにある</u>.

1-1) 図 1-1 (A)のように，密度が一様な棒が初期状態で粗い床面に垂直に立っている．棒の長さは $2L$，質量は M である．棒の太さは考えず，棒と床面は初期状態では点 O で点接触している．点 O を通り紙面に垂直な軸回りの棒の慣性モーメントを I_O とする．点 O を原点とし図 1-1 (A)のように水平方向に X 軸，鉛直方向に Y 軸を設定する．棒は X-Y 平面内で運動し，重力は Y 軸負方向に作用する．棒の重心位置を G とし，G の座標を(x, y)で表す．G は初期状態では$(0, L)$にある．棒はその後，図 1-1 (B)のように傾き始めた．棒の Y 軸からの傾きを θ とし，時計回りを θ の正方向とする．このとき以下の各小問に答えなさい．

(a) 図 1-1 (B)のように棒が傾いた状態で，棒には点 O で床面から抗力 R と摩擦力 F が，重心 G で重力 Mg が作用する．点 O で棒と床面の滑りが生じないとき，棒の X 軸方向の運動方程式，Y 軸方向の運動方程式，点 O 周りの運動方程式を，それぞれ $x, y, M, g, F, R, L, \theta, I_O$ およびそれらの変数の時間微分を用いて求めなさい．全ての変数を使う必要は無い．

(b) 上記(a)の状態で，棒が傾く角速度 $\dot{\theta}$ を M, g, L, θ, I_O を用いて表しなさい．

(c) 上記(a)の状態で，重心の加速度 $\ddot{x}, \ddot{y}$ を L, θ およびその時間微分で表しなさい．

(d) 上記(a)の状態で，抗力 R と摩擦力 F をそれぞれ，M, g, L, θ, I_O を用いて表しなさい．

(e) 上記(a)の状態からさらに棒が倒れ，$\alpha < \theta \left(0 < \alpha < \cos^{-1}(1/3)\right)$ となったときに棒が床面に対して滑り始めた．棒と床面の間の静止摩擦係数 μ を，M, L, α, I_O を用いて表しなさい．

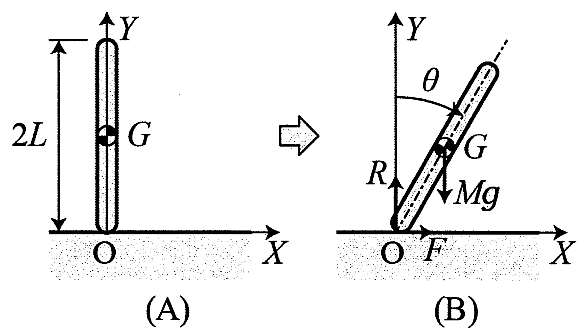

図 1-1

次ページに続く

1-2) 図 1-2 のように質量 m の 3 台の台車 Cart 1, Cart 2, Cart 3 を質量の無視できる 3 本のばねで連結する．Cart 2 はばねを介して壁に，Cart 1, Cart 3 はばねを介して Cart 2 に接続されている．3 本のばねのばね定数を k とする．3 台の台車は水平方向のみに移動できるものとし，Cart 1, Cart 2, Cart 3 の，つり合いの位置からの水平方向変位をそれぞれ x_1, x_2, x_3 とする．すべての摩擦は無視できる．重力は鉛直下方に作用するが台車の運動には影響しない．このとき以下の各小問に答えなさい．

(a) 図 1-2 の連成振動系の運動エネルギー K とポテンシャルエネルギー U を求めなさい．また求めた K と U を用いて，ラグランジアン L を求めなさい．

(b) 3 台の台車の変位を表すベクトルを $\boldsymbol{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T$ とおき，台車の水平方向の運動方程式を $\ddot{\boldsymbol{x}} = -(k/m)\boldsymbol{C}\boldsymbol{x}$ の形式で求めなさい．ただし $\boldsymbol{C}$ は3×3 の行列である．

(c) 上記(b)で求めた行列 $\boldsymbol{C}$ の固有値 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \left(|\lambda_1| < |\lambda_2| < |\lambda_3|\right)$ と，それに対応する固有ベクトル $\boldsymbol{\phi}_1, \boldsymbol{\phi}_2, \boldsymbol{\phi}_3$ を求めなさい（固有ベクトルは正規化しなくてよい）．

(d) $\boldsymbol{\Phi}$ を $\boldsymbol{\Phi} = [\phi_1 \quad \phi_2 \quad \phi_3]$ であらわされる行列とする．$\boldsymbol{x}^* = \boldsymbol{\Phi}^{-1}\boldsymbol{x}$ であらわされるモード座標 $\boldsymbol{x}^*$を用いて，(b)で求めた運動方程式を $\ddot{\boldsymbol{x}}^* = -(k/m)\Lambda\boldsymbol{x}^*$ の形に変換したときの対角行列Λ を求めなさい．

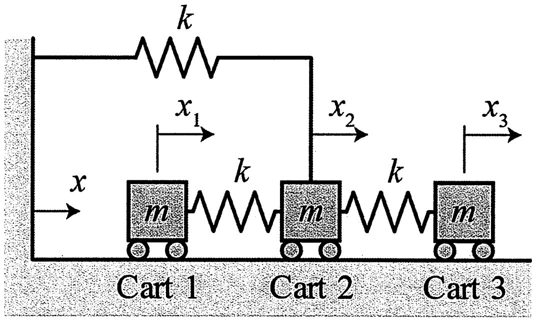

図 1-2

問 1　終わり

システム情報科学コース　専門科目２

問２（電気回路） 以下の各設問に答えなさい．

2-1) 図 2-1 に示す直流回路について，電流 $I\,[\mathrm{A}]$ の値を求めなさい．

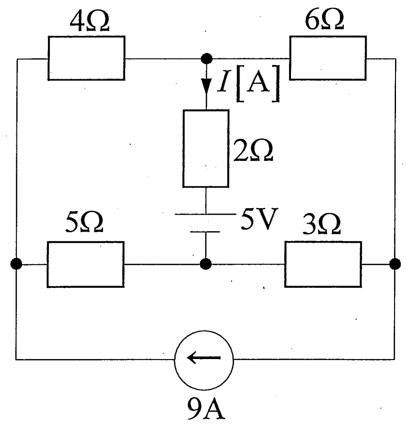

図 2-1

2-2) 図 2-2 の正弦波交流回路において，可変抵抗 R_4 および可変インダクタンス L_4 を調整したところ交流電流計の表示が 0 になった．そのときの R_4 および L_4 を，それぞれ R_1, R_2, R_3 の式および R, R_1, R_2, R_3, C_1 の式で表しなさい．

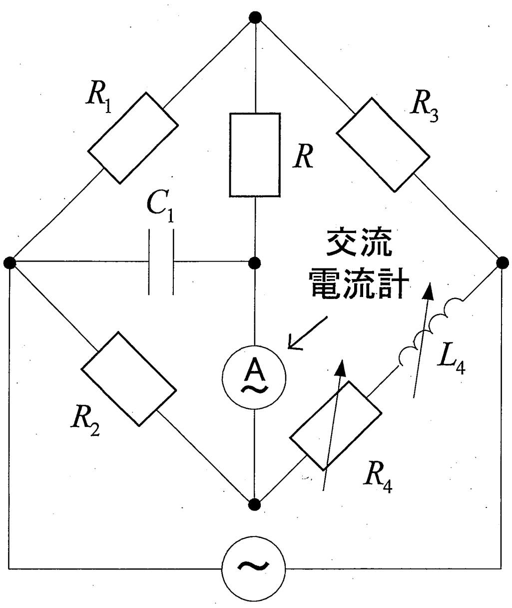

図 2-2

2-3) 図 2-3 において，スイッチ S が開いた状態で定常状態にある．時刻 $t = 0\,[\mathrm{s}]$ においてスイッチ S を閉じた．$t \geq 0\,[\mathrm{s}]$ の電流 i_1 および i_2 を時間の関数として求めなさい．

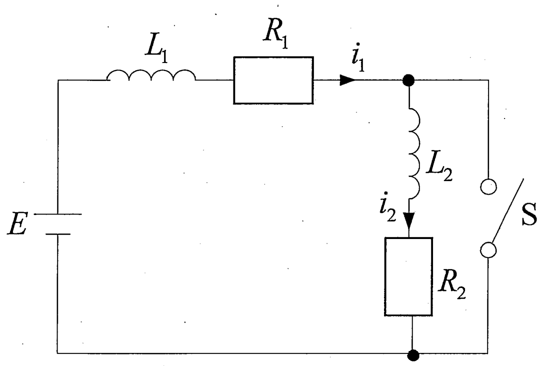

図 2-3

問２　終わり

システム情報科学コース 専門科目 2

問 3（電磁気学） 以下の各設問に答えなさい．ただしすべての設問において，媒質を真空とし，誘電率をε_0 [F/m]，透磁率をμ_0 [H/m]とする．

3-1) 図 3-1 のように，電流 I [A]，辺長d [m] の正方形の磁気双極子が x-y 平面上にある．x-y 平面の磁束密度を$\boldsymbol{B} = (0, 0, B_z(x))$ [T]とする．双極子の辺c_1, c_3 における磁束密度の z 成分をそれぞれ$B_z(x)$，$B_z(x+d)$と表す．このとき次の各小問に答えなさい．

(a) 磁気双極子に作用する力 $\boldsymbol{F} = (F_x, F_y, F_z)$ [N]を求めなさい．

(b) d が十分小さいとき，F_x は$\partial B_z/\partial x$ に比例することを示しなさい．

3-2) 図 3-2 のように内半径a [m]，外半径$a+d$ [m]，N 巻き，辺長d [m]の正方形断面コイルがある．コイルは一様，かつ十分密に巻かれており，磁界分布は円周方向に変化しないとする．このとき，次の各小問に答えなさい．

(a) コイルに直流電流 I [A]を流したとき，中心軸からの距離r[m] $(a < r < a+d)$ のコイル断面内の点の磁束密度 $\boldsymbol{B}$ [T]を求めなさい．

(b) 図 3-2 のような向きを持つコイルを囲む閉路 c を考える．このときベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ [Tm]の c に沿う周回積分

$$\oint_c \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{s}$$

の値を求めなさい．

(c) コイルの自己インダクタンス L [H]を求めなさい．

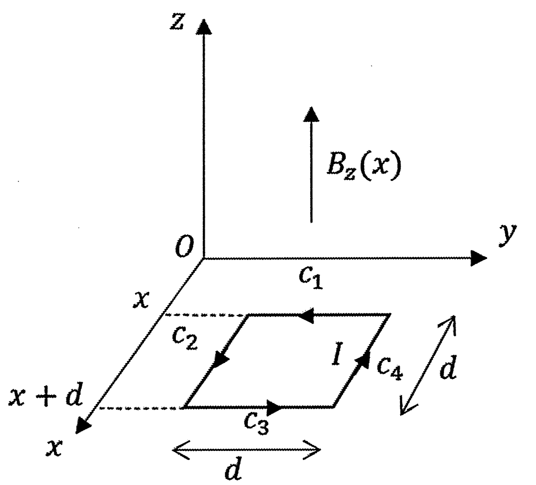

図 3-1

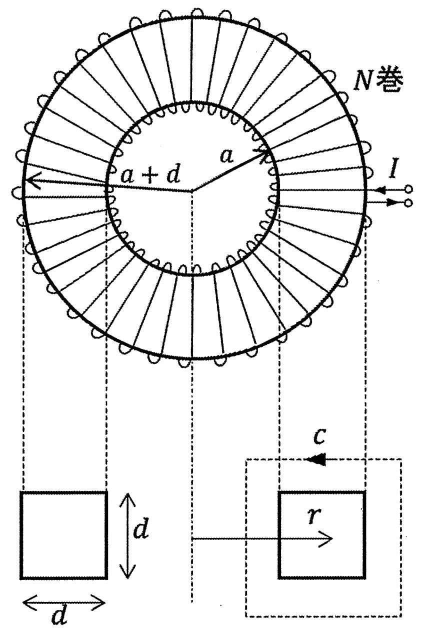

図 3-2

次ページに続く

3‒3) 図 3-3 のように半径 a[m]の導体球殻，半径b[m]の導体球殻からなる球形コンデンサを考える($a < b$). 中心からの距離を r [m]とする. このとき次の各小問に答えなさい.

(a) 球形コンデンサの静電容量C [F]を求めなさい.

(b) 球形コンデンサに，抵抗R [Ω]，角周波数 ω [rad/s]，電圧 V [V]の交流電源からなる回路を接続したところ，十分長い時間後に回路は定常状態となった. 時刻t [s]に導体球殻間を流れる変位電流を，フェーザ表示で$I(t) = \mathrm{Re}\left(\dot{I}e^{j\omega t}\right)$ [A]と表す. このとき振幅$\left|\dot{I}\right|$ [A]を求めなさい. ただし周波数は十分低く，電磁波による効果を無視できるとする.

(c) (b)のとき，導体球殻間の電界をフェーザ表示で$\boldsymbol{E}(r,t) = \mathrm{Re}(\dot{\boldsymbol{E}}(r)e^{j\omega t})$[V/m]と表す. このとき複素振幅$\dot{\boldsymbol{E}}(r)$[V/m]を求めなさい.

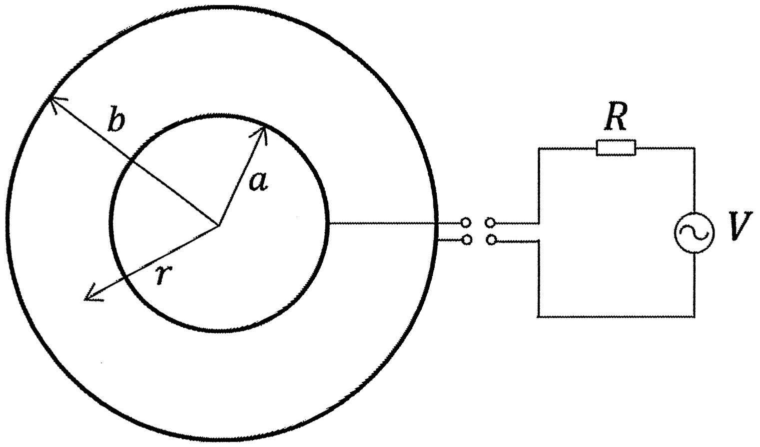

図 3-3

問 3 終わり

システム情報科学コース 専門科目2

問4（線形制御理論）

以下の各設問に答えなさい．ここで，$\dot{\boldsymbol{x}}$ は $\boldsymbol{x}$ の時間微分を表すこととする．

4-1) 周波数応答に関する次の小問 **(a)**，**(b)** に答えなさい．

(a) 伝達関数 $G_1(s) = \dfrac{b_1 s + b_0}{s^2 + 3s + 2}$ を考える．ここで，b_0, b_1 はある正の実定数である．この伝達関数に角周波数 $\omega = 1$ [rad/s] の正弦波を入力として印加したとき，出力の定常応答の位相は入力に比べて 45° 遅れた．このとき，b_0, b_1 が満たすべき条件を求めなさい．

(b) フィードバック制御系の一巡伝達関数が $G_2(s) = \dfrac{K}{s(s+a)(s+b)}$ として与えられているとする．ここで，K, a および b はある正の実定数である．このとき，ゲイン余裕が 20 dB となる K を，a, b を用いて表しなさい．

4-2) 図 4-1 のフィードバック制御系を考える．制御対象 $P(s)$ の状態空間表現は

$$\text{状態方程式：}\quad \dot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{p}}(t) = \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{p}}(t) + \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{p}}u(t) = \begin{bmatrix} 1 & p \\ q & -4 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{p}}(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}u(t)$$

$$\text{出力方程式：}\quad y(t) = \boldsymbol{c}_{\boldsymbol{p}}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{p}}(t) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{p}}(t)$$

で表わされているとする．ここで，$\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{p}}(t)$ は 2 次元状態ベクトル，$u(t)$ はスカラー入力，p, q はある実定数である．制御器 $C(s)$ は $C(s) = \dfrac{k_1 s + k_0}{s}$ の形で設計することとする．ここで，k_1, k_0 はある実定数である．次の小問 **(a)**，**(b)** および **(c)** に答えなさい．

(a) 制御対象 $P(s)$ の状態空間表現が可制御となる p, q の条件を求めなさい．

(b) この小問以降，$p = -4$，$q = 0$ と仮定する．制御対象 $P(s)$ の伝達関数を求めなさい．

(c) 閉ループ系が安定となる k_1, k_0 の条件を求めなさい．

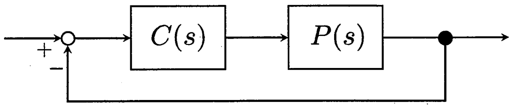

図 4-1

4-3) 状態方程式 $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}u$ で表される制御対象を考える．2 次元状態ベクトル $\boldsymbol{x}$ は直接観測できるとする．次の小問 **(a)**，**(b)** に答えなさい．

(a) 極を $-4, -1$ に設定する状態フィードバック $u = \boldsymbol{f}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$ の係数 f_1, f_2 を求めなさい．

(b) 小問 (a) で求めた状態フィードバックが，ある評価関数 $J = \displaystyle\int_0^\infty \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} q_1 & 0 \\ 0 & q_2 \end{bmatrix} \boldsymbol{x} + u^2 \, dt$ を最小化する最適レギュレータであるとする．このとき，代数リッカチ方程式の正定かつ対称となる解，および評価関数の重み q_1, q_2 を求めなさい．

問4終わり