北海道大学
大学院情報科学院情報科学専攻
システム情報科学コース 入学試験
修士課程

2025 年 8 月 25 日(月) 13:00～15:00

専門科目 2

受験上の注意

- 「解答始め」の合図があるまで，この問題冊子を開かないこと．
- 受験中，机上には，受験票，鉛筆（黒），シャープペンシル（黒），消しゴム，鉛筆削り，眼鏡，時計（計時機能のみのもの）以外の所持品は置くことができない．ただし，監督員が別に指示した場合は，この限りでない．
- 携帯電話等の情報通信機器類は，必ずアラームの設定等を解除した上で電源を切っておくこと．
- 問題冊子は本表紙を含め８枚ある（２枚目は白紙）．試験開始後，問題冊子を確認し，不備（ページ欠落，汚れ，印刷の不鮮明など）があれば試験監督員に申し出ること．試験終了後，問題冊子は回収しない．
- 解答用紙の枚数は2枚である．出題された4問中から2問を選択して，問題ごとに解答用紙を分けて解答すること．
- 解答用紙の裏面を使用してもよいが，その場合には解答用紙表面右下の「□裏面を使用」をチェックのこと．
- 解答用紙に選択した問題の番号，受験番号の誤記，記入もれがないか，十分に確かめること．受験番号と選択した問題の番号を別紙の「選択問題チェック票」にも記入し，提出のこと．
- 草案紙の枚数は2枚である．草案紙は回収しない．

システム情報科学コース　専門科目 2

問 1（力学）

図 1-1，1-2 の振り子を考える．いずれも x 軸を鉛直下向き，y 軸を水平方向，原点 O を支点として，$x-y$ 平面内のみで静かに微小振動する．また，x 軸からの振り子の振れ角を θ とし，微小振動として $\sin\theta \approx \theta$，$\cos\theta \approx 1$ と近似できるものとする．鉛直下向きにはたらく重力加速度の大きさを g とし，支点での摩擦および空気抵抗は無視できるものとする．以下の各設問に答えなさい．

1–1) 図 1-1 のように，質量 m の円板と重さの無視できる棒で作った剛体振り子を考える．棒の一端を支点に固定し，支点を通り紙面に垂直な軸周りで自由に回転できるようにした．また，円板面を $x-y$ 平面内にとり，支点と円板の中心を結ぶ線上に棒を置き，棒の他端に円板を固定して，微小振動させた．円板の密度は不均一であるが，重心は円板の中心にあることが分かっている．円板面に垂直で中心を通る軸周りの慣性モーメントを I，支点から円板中心までの距離を h とする．次の各小問に答えなさい．

(a) 振り子の回転軸（支点を通る軸）周りの慣性モーメント I' を求めなさい．

(b) 振り子の運動方程式を求めなさい．

(c) 振り子の周期を計ったところ T であった．円板の慣性モーメント I を求めなさい．

1–2) 図 1-2 のように，質量の無視できるバネ定数 k のバネ（自然長 r_0）の一端を支点として吊り下げ，他端に質量 m のおもりを取り付け，バネ振り子を作った．支点からおもりまでの距離を r として，おもり位置を極座標 (r,θ) で表す．バネは支点とおもりをつなぐ方向以外には曲がらないものとして，次の各小問に答えなさい．

(a) おもりの運動エネルギ，ポテンシャルエネルギを求めなさい．ただし，y 軸を重力によるポテンシャルエネルギの基準としなさい．

(b) おもり位置 (r,θ) を一般化座標として，ラグランジュの運動方程式の解法より，おもりの運動方程式を求めなさい．

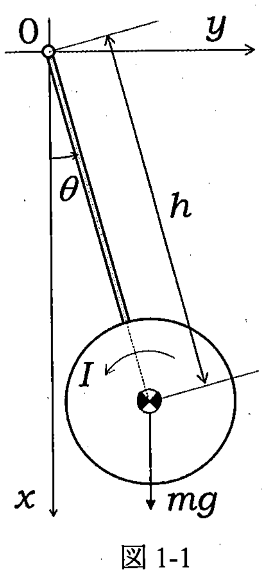

図 1-1

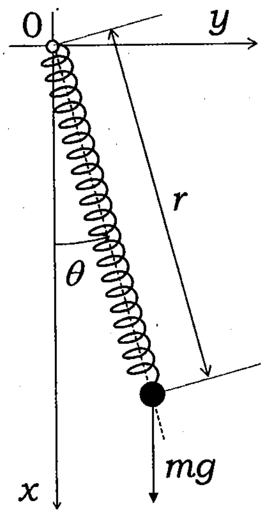

図 1-2

問 1 終わり

システム情報科学コース　専門科目２

問２（電気回路）

以下の各設問に答えなさい.

2–1) 図 2-1(a)に示す 2 端子対回路の電圧E_1，E_2と電流I_1，I_2の関係が次式(1)のように書けるとき，図 2-1(b)の回路の交流電源 E から見たインピーダンスをZ_{11}，Z_{12}，Z_{21}，Z_{22}，Z_3，Z_4を使って表しなさい.

$$\begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

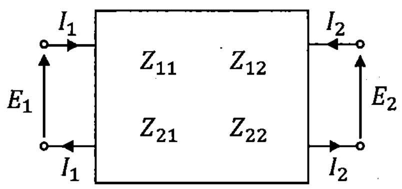

図 2-1(a)

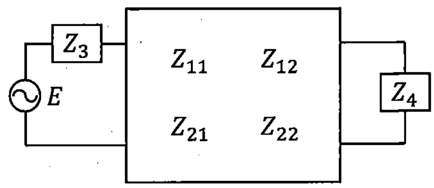

図 2-1(b)

2–2) 図 2-2 に示す回路について，次の小問(a)，(b)に答えなさい．ただし，初期状態($t = 0$ s)において開いているスイッチS_1を閉じ，その T 秒後($t = T$ [s])にスイッチS_1を閉じたまま，閉じていたスイッチS_2を開いたとする．なお，初期状態($t = 0$ s)においてインダクタンス L には電流が流れていなかったものとする.

(a) 電流 $i(t)$ を時間tの関数として，V，L，R，T を使って表しなさい.

(b) $t = T$ [s]のときと，$t = \infty$ [s]のときの電流 $i(t)$ が一致するときの T を R と L を使って表しなさい．また，その条件下で，T 秒後以降の電流の挙動がどうなるのか説明しなさい.

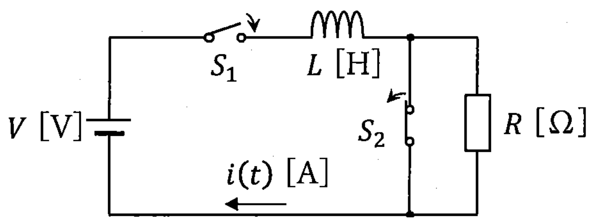

図 2-2

次ページに続く

2–3) 図 2-3 において，スイッチSが開いた状態で定常状態にある．時刻$t = 0$ s においてスイッチSを閉じた．電流 $i(t)$ を求めなさい．ただし，$t = 0$ s 時にコンデンサ C_1 に Q [C]の電荷が溜まっており，コンデンサ C_2 には電荷が溜まっていないとする．

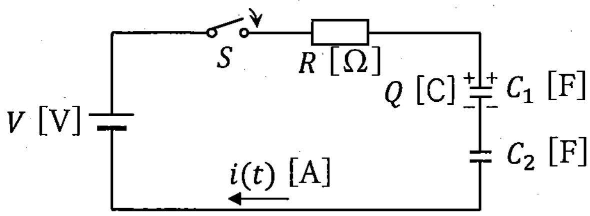

図 2-3

問 2 終わり

システム情報科学コース　専門科目 2

問 3（電磁気学） 以下の各設問に答えなさい．ただしすべての設問において，真空の誘電率をε_0 [F/m]，透磁率をμ_0 [H/m]とする．

3-1)　図 3-1 のようにQ [C]に帯電した半径a [m]の導体球が，内半径b [m]，外半径c [m]（$b < c$）の厚みのある導体球殻に囲まれている．球と球殻の中心は一致しており，それらの間は真空である．また，球殻は真空中に孤立しており，帯電していない．このとき次の各小問に答えなさい．

(a) 球の中心からの距離をr [m]とする．電界の大きさ$|\boldsymbol{E}|$ [V/m]について，横軸をr，縦軸を$|\boldsymbol{E}|$としてグラフを描きなさい．

(b) 導体球の静電容量 C [F]を求めなさい．

3-2)　図 3-2 のように真空中のx-y平面内に正三角形状の電流ループがある．正三角形の一辺の長さをa [m]，流れている電流をI [A]とするとき，正三角形の重心Oにおける磁束密度のz成分B_z [T]を求めなさい．ただし，必要であれば次の積分を使ってよい．

$$\int \frac{1}{(x^2+d^2)^{\frac{3}{2}}}dx = \frac{x}{d^2\sqrt{x^2+d^2}} + \mathrm{C}_1$$

（dは実数，C_1は積分定数）

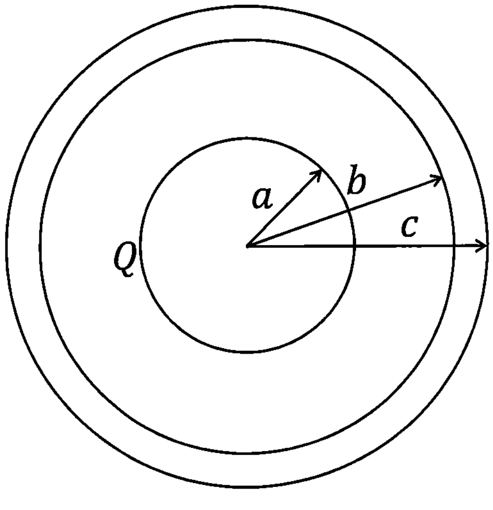

図 3-1

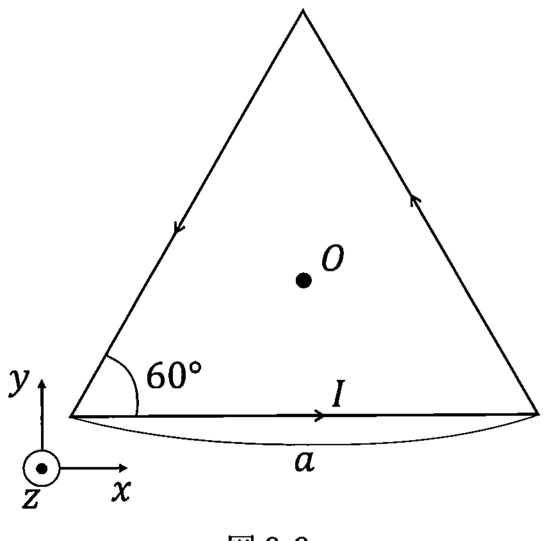

図 3-2

次のページに続く

3-3)　真空中の電磁界に対するマクスウェル方程式

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{H} = \varepsilon_0 \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} \tag{1a}$$

$$\mathrm{rot}\boldsymbol{E} = -\mu_0 \frac{\partial \boldsymbol{H}}{\partial t} \tag{1b}$$

$$\mathrm{div}(\varepsilon_0 \boldsymbol{E}) = 0 \tag{1c}$$

$$\mathrm{div}(\mu_0 \boldsymbol{H}) = 0 \tag{1d}$$

を考える．ただし，$\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E}$は磁界強度[A/m]，電界[V/m]を表す．また，直交座標系(x, y, z)を考え，z軸に垂直な任意の平面上で電界$\boldsymbol{E}$，磁界強度$\boldsymbol{H}$が一様，すなわち，x, yについての偏微分がゼロであるとする．このとき次の各小問に答えなさい．

(a) 磁界強度と電界のz成分を$H_z = 0, E_z = 0$として，方程式(1a)~(1d)から波動方程式(2)を導きなさい．ただし，$c = 1/\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}$とする．

$$\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2} \tag{2}$$

(b) 電界

$$\boldsymbol{E} = \sin(kz - \omega t)\, \boldsymbol{e}_x + \cos(kz - \omega t)\, \boldsymbol{e}_y \tag{3}$$

は方程式(2)の解であることを示しなさい．ただし，$\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y$は x, y方向の単位ベクトルであり，k, ωは$\omega/k = c$を満たす定数とする．

(c) 電界が式(3)のように与えられるとき，$\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{H}$を求めなさい．ただし，磁界強度$\boldsymbol{H}$は静磁界成分を表す定数項を含まないものとする．

問3　終わり

システム情報科学コース 専門科目 2

問 4 (線形制御理論)

以下の各設問に答えなさい．ここで，$\dot{x}, \ddot{x}$ は，それぞれ x の時間微分, 時間に関する 2 階微分を表し，j は虚数単位とする．

4-1) 安定な伝達関数 $G_1(s)$ に入力 $\cos(3t)$ を入力したとき，十分時間が経過した後の出力が $2\sqrt{2}\cos(3t-\pi/4)$ に漸近した．また，$G_1(0)$ は 1 であった．次の各小問に答えなさい．

(a) 角周波数 3 における $G_1(s)$ の周波数応答 $G_1(3j)$ の実部・虚部の値を答えなさい．

(b) $G_1(s)$ は 2 次系で相対次数 2 であると仮定する．すなわち $G_1(s) = \dfrac{c}{s^2+as+b}$ (a, b, c は実定数) の形をしていると仮定する．a, b, c の値を求めなさい．

4-2) システム $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}u = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ p & -2 & 1 \\ 0 & 9 & q \end{bmatrix}\boldsymbol{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}u,\quad y = \boldsymbol{c}\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}$ を考える．ここで $\boldsymbol{x}$ ($\in \mathbb{R}^3$) は系の状態，u ($\in \mathbb{R}$) は入力，y ($\in \mathbb{R}$) は出力である．次の各小問に答えなさい．

(a) このシステムが可制御かつ可観測である条件を p, q を用いて簡潔に表しなさい．

(b) $p=-1, q=-1$ とする．このシステムの入出力関係を表す伝達関数 $G_2(s)$ を求めなさい．

(c) 引き続き，$p=-1, q=-1$ の場合を考える．この系にフィードバック $u = k(-y+v)$ を適用する．ここで，k は実定数で v は新たな外部入力である．伝達関数 $G_2(s)$ を用いて図 4-1 のように考えてもよい．このフィードバックの下での閉ループ系が安定となるような k の範囲を求めなさい．

(d) 小問 (c) における閉ループ系を考え，k は閉ループ系が安定となるように選ばれているものとする．このとき，v に単位ステップ信号を加えたときの定常偏差を求めなさい．

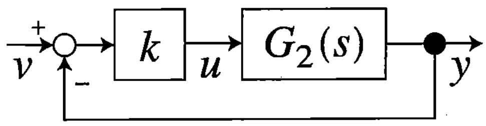

図 4-1

4-3) 数直線上を質量 1 の質点が動き，その位置を z とする．その質点には粘性抵抗 $-2\dot{z}$，および外力 u が加わっているとしたとき，運動方程式は $\ddot{z} = -2\dot{z} + u$ となる．次の各小問に答えなさい．

(a) 外力 u をシステムへの入力とみなし，状態ベクトルを $\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} z \\ \dot{z} \end{bmatrix}$ とおいたとき，このシステムの状態方程式を求めなさい．

(b) コスト関数 $J = \int_0^\infty \boldsymbol{x}(t)^\top \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\boldsymbol{x}(t) + ru(t)^2\,dt$ を最小化する最適制御問題を考え，代数 Riccati 方程式の正定対称解および最適レギュレータを求めなさい．ただし，$r=1$ とする．

問 4 終わり